

Exercice n° 1 : (8 points)

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique tel que  $U_2 = 20$  et  $U_5 = 47$ .

- 1°) a) calculer la raison  $r$  et le première terme  $U_0$ . b) En déduire que  $U_n = 9n + 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2°) Calculer le 5<sup>ème</sup> terme.
- 3°) Calculer le rang du terme qui est égal à 83.
- 4°) Calculer la somme des termes qui sont compris entre 38 et 93
- 5°) on pose  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ .

a) Exprimer  $S_n$  à l'aide de  $n$ . ; b) Déterminer  $n$  pour que  $S_n = 1413$ .

6°) Soit  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique tel que  $W_0 = 5$  et la somme de ses 8 premiers termes est égale à 376. Calculer sa raison  $r$  en déduire que  $W_n = 12n + 5$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

7°) Déterminer les termes de la suite  $(W_n)$  tel que  $n+5$  divise  $W_n$

8°) a) Montrer que si un entier naturel  $d$  divise  $W_n$  et  $U_n$  alors  $d$  divise 7

b) Montrer que si  $(n+1)$  est un multiple de 7 alors  $\text{PGCD}(U_n, W_n) = 7$

Exercice n° 2 : (6 points)

On pose  $f(x) = 2 \cos^2 x - \cos x - 1$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

1°) Calculer  $f(0)$ ,  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ .

2°) Résoudre dans  $[0, \pi]$  :  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = -1$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ .

3°) On pose  $g(x) = f\left(\pi - x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

a) Montrer que  $g(x) = \cos x - \sin x$ . ; b) Sans calculatrice, calculer  $g\left(\frac{\pi}{8}\right) + g\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

4°) Sachant que  $\tan x = -2$ . Calculer  $\cos x$  puis  $g(x)$ .

5°) Sans calculatrice a) calculer :  $S_1 = \cos^2 \frac{5\pi}{24} + \cos^2 \frac{7\pi}{24} + \cos^2 \frac{17\pi}{24} + \cos^2 \frac{19\pi}{24}$

b) En déduire  $S_2 = \sin^2 \frac{5\pi}{24} + \sin^2 \frac{7\pi}{24} + \sin^2 \frac{17\pi}{24} + \sin^2 \frac{19\pi}{24}$

Exercice n° 3 : (6 points)

ABC un triangle direct rectangle en A tel que  $AB=6$  et  $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$  on construit à l'extérieur de ABC les triangles équilatéraux AIB et BJC on désigne par  $r$  la rotation indirecte de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

1°) Déterminer  $r(I)$  et  $r(C)$ .

2°) Soit  $K = S_{(BC)}(A)$ .

a) Montrer que  $K=r(A)$ . b) Montrer que  $AC=KJ$  et  $\widehat{BKJ} = \frac{\pi}{2}$ . c) Montrer que  $K = J * C$

3°) a) Montrer que AIBK est un losange. b) En déduire  $(AI) \perp (CJ)$ .

4°) On suppose que les points B et C sont fixes et que A est variable.

Déterminer le lieu géométrique des points I lorsque A varie.